Písemka - 6. proseminář (3. dubna 2008)

1. příklad (5 bodů)
Spočti NSD(183, 228) a najdi celá čísla x, y taková, že $\mathrm{NSD}(183, 228) = 183x + 228y$.

2. příklad (5 bodů)
V závislosti na celém čísle n urči $\mathrm{NSD}(3n - 1, 10n + 1)$.

3. příklad (5 bodů)
Dokaž, že 13 dělí $42^{42} - 27^{27}$.

4. příklad (5 bodů)
Najdi všechna celá čísla x taková, že $4x \equiv 3 \pmod{13}$ a $6x \equiv 8 \pmod{14}$.

5. příklad (5 bodů)
Definuj Eulerovu funkci $\varphi(n)$ a spočti $\varphi(198)$.

6. příklad (5 bodů)
Dokaž, že pro všechna přirozená čísla m platí $\varphi(4m + 2) = \varphi(2m + 1)$.

7. příklad (5 bodů)
Urči poslední cifru čísla $2007^{2006^{2005}}$.

8. příklad (10 bodů)
Pro přirozené číslo n označme $d(n)$ počet přirozených čísel, která dělí n. Dokaž, že pro každé n_0 existují čísla $m > n > n_0$ taková, že $d(n^2 + 1) \geq d(m^2 + 1)$.

K úspěšnému napsání písemky je potřeba získat aspoň 27 bodů.